Naam: Tjitske Staarkenburg
Adres: Maesstraat 6
Postcode en Woonplaats: 9717 JW Groningen

Studentnummer: S 1554166
Studierichting: sterrenkunde - wiskunde
Jaar van eerste inschrijving: 2005

Bladnr.: 1 totaal 4.
Tentamen: Algebra
Datum: 07-02-07
Naam docent: Lenny Taelman

+ ①

G een groep $a,b \in G$.
aan te tonen: $G \to G : g \mapsto agb$
is een bijectie.

Voor een bijectie moet de afbeelding injectief en surjectief zijn.

injectief: $agb = ahb \Rightarrow g = h$.

$agb = ahb$
$ag = ahbb^{-1}$ — $bb^{-1} = e$ want $b \in G$ dus b heeft een inverse. Hetzelfde geldt voor a.
$g = a^{-1}ahbb^{-1}$
$= e h e = h$.

surjectief:
genoeg is ook: te laten zien dat
$\#G = \#aGb$.
aangezien voor elk element in G er een element in aGb bestaat is $\#G = \#aGb$

$\Rightarrow G \to G : g \mapsto agb$ is een bijectie

G hoeft niet eindig te zijn

+ ② p is een priemgetal groter dan 5.
Aan te tonen:
$30 \mid p^4 - 1$.
dus $(p^4 \bmod 30) = 1 \bmod 30$.
Nu geldt voor elke $a \bmod 30 \in (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^*$
dat $(a \bmod 30)^{\varphi(30)} = 1 \bmod 30$.
nu is ~~echter~~ $\varphi(30) = 8$ $(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{19}, \bar{23}, \bar{29}\}$
~~dus we zullen het nog iets anders moeten zoeken~~
Dit betekent dus dat
$(p \bmod 30)^8 = 1 \bmod 30$
en $30 \mid p^8 - 1$
er geldt echter dat $p^8 - 1 = (p^4 - 1)(p^4 + 1)$
en voor n|ab geldt n|a of n|b

dus $30 \mid p^4 - 1$ of $30 \mid p^4 + 1$
neem $p = 7$ dan
$p^4 = 2401$
$30 \nmid 7^4 + 1$ maar $\bar{7} \in (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})^*$
dus $30 \mid 7^8 - 1$ geldt wel!
Hieruit volgt dat moet gelden
$30 \mid p^4 - 1$.

Naam: Tjitske Starkenburg | Studentnummer: s 1554166 | Blad nr.: 2
Adres: | Studierichting: | Tentamen: Algebra
Postcode en Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Datum: 07-02-07
Naam docent:

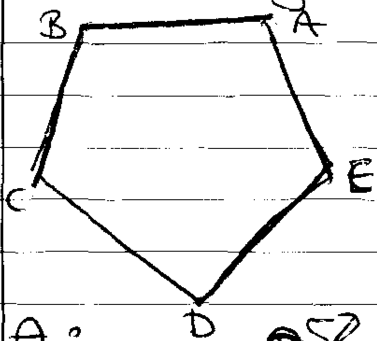
③ Homomorfismen van $\mathbb{Z}$ naar D_5.

$f: (\mathbb{Z}, +, 0) \longrightarrow (D_5, \circ, id)$

Homomorfisme: $f(a+b) = f(a) \circ f(b)$
en $f(0) = id$ sowieso.

$\mathbb{Z} = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \}$

D_5 = symmetrieën van een regelmatige vijfhoek $= \{ id, S_A, S_B, S_C, S_D, S_E, R_{1/5}, R_{2/5}, R_{3/5}, R_{4/5} \}$



$ord(id) = 1$
$ord(S_{A..E}) = 2$
$ord(R_{i/5}) = 5 \quad i = 1, 2, 3, 4.$

A: $5\mathbb{Z} \longrightarrow id$
$5\mathbb{Z}+1 \longrightarrow R_{1/5}$
$5\mathbb{Z}+2 \longrightarrow R_{2/5}$
$5\mathbb{Z}+3 \longrightarrow R_{3/5}$
$5\mathbb{Z}+4 \longrightarrow R_{4/5}$

Dit is een homomorfisme van $\mathbb{Z}$ naar D_5.

B: $\mathbb{Z} \longrightarrow id$
is ook een homomorfisme van $\mathbb{Z}$ naar D_5.

C: $2\mathbb{Z} \longrightarrow id$
$2\mathbb{Z}+1 \longrightarrow S_A$

D: $2\mathbb{Z} \longrightarrow id$
$2\mathbb{Z}+1 \longrightarrow S_B$

Dit geeft 7 homomorfismes van $\mathbb{Z} \longrightarrow D_5$.
Volgens mij zijn dat ze allemaal.

E: $2\mathbb{Z} \longrightarrow id$
$2\mathbb{Z}+1 \longrightarrow S_C$

F: $2\mathbb{Z} \longrightarrow id$
$2\mathbb{Z}+1 \longrightarrow S_D$

G: $2\mathbb{Z} \longrightarrow id$
$2\mathbb{Z}+1 \longrightarrow S_E$

+ ④ $G = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\ \ a,b \neq 0\}$

is G een groep onder vermenigvuldiging van complexe getallen?

G is een groep als:

(G1) voor alle $x,y,z \in G$ geldt $x(y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$$\left((a+bi)(c+di)\right)(e+fi) = (ac-db+i(ad+bc))(e+fi)$$
$$= ace - dbe + ie(ad+bc) + acfi - dbfi - fad - bcf.$$
$$= ace - dbe - fad - bcf + i(ead + bce + acf - dbf)$$

$$(a+bi)\left((c+di)(e+fi)\right) = (a+bi)(ce-df+i(cf+de))$$
$$= ace - dfa + ia(cf+de) + ib(ce-df) - bcf - bde$$
$$= ace - dfa - bcf - bde + i(acf + ade + bce - bdf)$$

en dat is gelijk.

Dus associativiteit klopt voor G.

(G2) $\exists\, e \in G$ zodat voor alle $x \in G$ $x \cdot e = x = e \cdot x$

Dit geldt voor $e = +1$.

(G3) Voor elke $x \in G$ is er een $y \in G$ zodat $x \cdot y = e = y \cdot x$.

Voor elke $a+bi$ geldt $(a+bi) \cdot \frac{1}{a+bi} = 1$.

dus voor elke $x \in G$ bestaat er een inverse $y = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

en aangezien de voorwaarde voor $a+bi \in G$ al was dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$ kan dit ook.

Dus G is een groep onder de vermenigvuldiging van complexe getallen.

Naam: Tjitske Starkenburg | Studentnummer: s 1554166 | Bladnr.: 3
Adres: | Studierichting: | Tentamen: Algebra
Postcode en | | Datum: 07-02-07
Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

+ 5. Abelse groepen ($x \cdot y = y \cdot x$ voor $\forall x,y \in G$)

met 9 elementen:
$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8}\}$.
Deze groep is Abels.

~~Omdat geldt~~ Hier geldt:
a) Alle Abelse groepen zijn isomorf met
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \ \_\_ \ \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$
b) (Chinese reststelling) Als n, m onderling ondeelbaar (ggd$(n,m)=1$) dan $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ is isomorf met
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Dus met 9 elementen zijn alle Abelse groepen:
$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (ggd$(3,3)=3$)
alle abelse groepen ~~zijn isom~~ met 9 elementen zijn isomorf met deze twee, en deze twee zijn niet isomorf met elkaar, want?

Met 99 elementen:
$\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$
de delers van 99 zijn: 3, 33, 9, 11
ggd$(3,33)=3$
dus $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ voldoet ook.
ggd$(9,11)=1$ dus $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ voldoet niet, want die is isomorf met $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$.
alle ~~elemen~~ abelse groepen met 99 elementen zijn dus:
$\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Er zijn dus 2 abelse groepen met 9 elementen en 2 abelse groepen met 99 elementen.

± 0 (6) $f: S_5 \longrightarrow A_7$.

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{als } \sigma \text{ even} \\ \sigma \circ (67) & \text{als } \sigma \text{ oneven.} \end{cases}$$

Het beeld $f(\sigma)$ moet even zijn voor alle $\sigma \in S_5$.

2 mogelijkheden:

a) σ is zelf even. Dan $f(\sigma) = \sigma$ dus $f(\sigma)$ is even.

b) σ is oneven. Dan $f(\sigma) = \sigma \circ (67)$ en $f(\sigma)$ is dus ~~even~~ oneven · oneven = even.

Het beeld $f(\sigma)$ is even voor alle $\sigma \in S_5$.

f is injectief dan en slechts dan als $\mathrm{Ker}(f) = (1)_{S_5} \in S_5$.

$\mathrm{Ker}(f) = \{\sigma \in S_5 \mid f(\sigma) = (1)_{A_7}\}$ waarbij $(1)_{A_7}$ het eenheidselement van A_7 is. ($(1)_{S_5}$ is het eenheidselement van S_5).

$f(\sigma) = (1)_{A_7}$ twee gevallen:

a) Stel σ was even dan σ was $(1)_{S_5}$.

b) Stel σ was oneven dan ~~σ was~~

$$f(\sigma) = \sigma \circ (67)$$

$$(1)_{A_7} = \sigma \circ (67)$$

dan $\sigma = (67)^{-1} = (67)$.

maar $\sigma \in S_5$ en $(67) \notin S_5$

dus tegenspraak.

Dus $f(\sigma) = (1)_{A_7}$ kan alleen als σ even was en dus is $\mathrm{Ker}(f) = \{(1)_{S_5}\}$.

dus f is injectief.

Er is geen injectief homomorfisme van S_5 naar A_6. Dit doordat er voor de oneven $\sigma \in S_5$ geen mogelijkheid is ze even te maken zonder dat ~~dat~~ de permutatie zelf ook beïnvloed (bijv door $\sigma \circ (56)$ te doen of zoiets). Daardoor is de functie dan geen homomorfisme meer.

Naam: Tjitske Starkenburg | Studentnummer: s1554166 | Bladnr.: 4
Adres: | Studierichting: | Tentamen: Algebra
Postcode en | | Datum: 07-02-07.
Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

✓ (7) Er is géén injectief homomorfisme van Q_8 naar S_4.
Om een homomorfisme te maken zou je elementen van orde n in Q_8 naar elementen van orde n in S_4 willen sturen.
Dus $-1 \longrightarrow (ab) \in S_4$. of $(ab)(cd) \in S_4$.
Dit heeft echter als gevolg dat
$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ niet voldoet
wanneer $a = -1$ en $b =$ een element van orde 4.
$f(a \cdot b)$ is dan namelijk weer orde 4.
terwijl $f(a) \circ f(b)$ dan orde 2 heeft niet
max 2
Dit zou opgelost kunnen worden door -1 naar een element $\in S_4$ te sturen van orde 3.
Alleen dan geldt $f(-1 \cdot -1) = f(-1) \cdot f(-1)$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & & \not\shortparallel \\ f(1) = (1)_{\in S_4} & & (1)_{\in S_4}. \end{array}$$

Dus er is geen homomorfisme ~~van~~ dat injectief is, mogelijk ~~tussen~~ van Q_8 naar S_4.
(voor géén injectief homomorfisme zou $-1 \rightarrow (1)_{S_4}$ kunnen gaan).

Als er een surjectief homomorfisme van ~~Q_8~~ S_4 naar Q_8 zou zijn, zou dat dus betekenen dat heel Q_8 bereikt wordt door $f(S_4)$.
Echter om een homomorfisme te maken moet gelden:
$$f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b).$$
en dus ook $f(aa) = f(a) \cdot f(a)$.
? Dus elementen van orde n in S_4 moeten naar elementen van orde n in Q_8 gestuurd
Nu zijn er elementen in S_4 met orde 3, bijv. (123) en (213) en Q_8 heeft geen elementen van orde 3. ~~Deze~~ Een oplossing daarvoor zou kunnen zijn deze elementen

naar het eenheidselement $1 \in Q_8$ te sturen.

Echter ~~er zijn 6 verschillende elementen van orde~~ dan is bijvoorbeeld:

$$f(123) = 1$$
$$f(1234) = i$$
$$f((123)(1234)) = f(1234) \cdot f(123)$$
$$= f(1342) \neq 1 \cdot i = i$$

en $f(1342) \neq i$ omdat beide groepen 6 elementen van orde 4 hebben. Deze elementen moeten dus naar elkaar gestuurd worden en dan kan niet $f(1234) = f(1342) = i$.

Dus er is geen surjectief homomorfisme mogelijk van S_4 naar Q_8.